ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

TRẦN THỊ NHÀN

ĐIỀU KIỆN CẦN VÀ ĐỦ CHO NGHIỆM HỮU HIỆU CỦA BÀI TOÁN TỐI ƯU ĐA MỤC TIÊU QUA DƯỚI VI PHÂN SUY RỘNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - Năm 2015

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan rằng các kết quả nghiên cứu trong luận văn này là trung thực và không trùng lặp với các đề tài khác. Tôi cũng xin cam đoan rằng mọi sự giúp đỡ cho việc thực hiện luận văn này đã được cảm ơn và các thông tin trích dẫn trong luận văn đã được chỉ rõ nguồn gốc.

Thái Nguyên, tháng 4 năm 2015

Người viết luận văn

Trần Thị Nhàn

Lời cảm ơn

Luận văn được thực hiện và hoàn thành tại trường Đại học sư phạm - Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn khoa học của PGS. TS. Đỗ Văn Lưu. Qua đây, tác giả xin được gửi lời cảm ơn sâu sắc đến thầy giáo, người hướng dẫn khoa học của mình, PGS. TS. Đỗ Văn Lưu, người đã tận tình hướng dẫn trong suốt quá trình nghiên cứu của tác giả. Đồng thời tác giả cũng chân thành cảm ơn các thầy cô trong khoa Toán, khoa Sau đại học - Trường Đại học sư phạm, Đại học Thái Nguyên, đã tạo mọi điều kiện để tác giả hoàn thành bản luận văn này. Tác giả cũng gửi lời cảm ơn đến gia đình và các bạn trong lớp Cao học Toán K21b, đã động viên giúp đỡ tác giả trong quá trình học tập và làm luận văn.

Luận văn không thể tránh khỏi những thiếu sót, tác giả rất mong nhận được sự chỉ bảo tận tình của các thầy cô và bạn bè đồng nghiệp.

Thái Nguyên, tháng 4 năm 2015

Người viết luận văn

Trần Thị Nhàn

Mục lục

Mở đầu

1. Lý do chọn luận văn

Năm 1994, Demyanov [5] đã đưa ra khái niệm dưới vi phân suy rộng compăc lồi. Khái niệm này là một tổng quát hoá của khái niệm lồi trên và lõm dưới (xem [6]). Các khái niệm dưới vi phân suy rộng đóng, không lồi và Jacobian xấp xỉ được đề xuất bởi Jeyakumar và Luc trong [9] và [10]. Khái niệm dưới vi phân suy rộng là tổng quát hoá của một số các khái niệm dưới vi phân đã biết của Clarke [4], Michel-Penot [17], Mordukhovich [18]. Một điều kiện cần Fritz John cho cực tiểu yếu của bài toán quy hoạch đa mục tiêu dưới ngôn ngữ Jacobian xấp xỉ được đưa ra bởi Luc [12]. Điều kiện cần tối ưu Fritz John cho cực tiểu yếu dưới ngôn ngữ dưới vi phân suy rộng được đưa ra bởi Dutta- Chandra [7,8] cho bài toán tối ưu đa mục tiêu với các ràng buộc bất đẳng thức. Điều kiện cần cho cực tiểu yếu và cực tiểu Pareto được đưa ra bởi Luu [15] với các ràng buộc đẳng thức, bất đẳng thức và ràng buộc tập.

Dựa trên định lí Ljusternik mở rộng của Jiménez-Novo (2002), D.V.Luu (2014) đã thiết lập các điều kiện tối ưu cho cực tiểu Pareto yếu của bài toán tối ưu đa mục tiêu có ràng buộc đẳng thức, bất đẳng thức và ràng buộc tập dưới ngôn ngữ dưới vi phân suy rộng (convexificator). Đây là đề tài đang được nhiều tác giả trong và ngoài nước quan tâm nghiên cứu. Chính vì thế em chọn đề tài : "Điều kiện cần và đủ cho nghiệm hữu hiệu của bài toán tối ưu đa mục tiêu qua dưới vi phân suy rộng".

2. Phương pháp nghiên cứu

Sưu tầm và đọc tài liệu từ các sách, tạp chí toán học trong nước và quốc tế liên quan đến điều kiện tối ưu cho bài toán tối ưu véc tơ. Qua đó, tìm hiểu và nghiên cứu về vấn đề này.

3. Mục đích của luận văn

Luận văn trình bày các điều kiện cần và đủ cho nghiệm hữu hiệu dưới ngôn ngữ dưới vi phân suy rộng trong bài báo của D. V. Lưu đăng trong tạp chí Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 160 (2014), pp. 510-526.

4. Nội dung của luận văn

Luận văn bao gồm phần mở đầu, 2 chương, kết luận và danh mục các tài liệu tham khảo

Chương 1: Điều kiện cần Fritz John cho cực tiểu yếu

Trình bày một số kiến thức cơ bản về dưới vi phân suy rộng và điều kiện cần Fritz John cho cực tiểu Pareto yếu của bài toán tối ưu đa mục tiêu có ràng buộc đẳng thức, bất đẳng thức và ràng buộc tập với các hàm Lipschitz địa phương.

Chương 2: Điều kiện chính quy và điều kiện tối ưu Karush-Kuhn-Tucker

Trình bày các điều kiện chính quy và điều kiện cần Karush-Kuhn-Tucker cho bài toán tối ưu đa mục tiêu có ràng buộc đẳng thức, bất đẳng thức và ràng buộc tập với các hàm Lipschitz địa phương dưới ngôn ngữ dưới vi phân suy rộng với các giả thiết về tính lồi suy rộng, các điều kiện cần tối ưu trở thành các điều kiện đủ tối ưu.

Chương 1

Điều kiện cần Fritz John cho cực tiểu yếu

Trong chương 1 chúng tôi trình bày một số kiến thức cơ bản về dưới vi phân suy rộng và điều kiện cần Fritz John cho cực tiểu Pareto yếu của bài toán tối ưu đa mục tiêu có ràng buộc đẳng thức, bất đẳng thức và ràng buộc tập dưới ngôn ngữ dưới vi phân suy rộng. Các kết quả trình bày trong chương này được tham khảo trong [9], [14].

1.1 Các kiến thức bổ trợ

1.1.1. Dưới vi phân suy rộng

Cho f là hàm giá trị thực mở rộng được xác định trên $\mathbb{R}^n$. Nhắc lại rằng đạo hàm theo phương Dini dưới và trên f^- và f^+ của f tại $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ theo phương $v \in \mathbb{R}^n$ được xác định như sau:

$$f^-(\bar{x}; v) := \liminf_{t \downarrow 0} \frac{f(\bar{x} + tv) - f(\bar{x})}{t},$$

$$\left(f^+(\bar{x}; v) := \limsup_{t \downarrow 0} \frac{f(\bar{x} + tv) - f(\bar{x})}{t} \right).$$

Nếu $f^+(\bar{x}; v) = f^-(\bar{x}; v)$, thì giá trị chung đó được gọi là đạo hàm của hàm f tại $\bar{x}$ theo phương v và ký hiệu là $f'(\bar{x}; v)$. Hàm f gọi là khả vi theo phương tại $\bar{x}$ nếu tồn tại đạo hàm theo phương của nó tại $\bar{x}$ theo mọi phương. Nếu f là khả vi Fréchet tại $\bar{x}$ với đạo hàm Fréchet $\nabla f(\bar{x})$ thì $f'(\bar{x}; v) = \langle \nabla f(\bar{x}, v) \rangle$.

Theo [9] hàm f được gọi là có dưới vi phân suy rộng trên $\partial^* f(\bar{x})$ (hay dưới $\partial_* f(\bar{x})$) tại $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ nếu $\partial^* f(\bar{x})$ (hay $(\partial_* f(\bar{x})) \subseteq \mathbb{R}^n$) là tập đóng và

$$f^-(\bar{x}; v) \leq \sup_{\xi \in \partial^* f(\bar{x})} \langle \xi, v \rangle \qquad (\forall v \in \mathbb{R}^n),$$

$$\left(f^+(\bar{x}; v) \geq \inf_{\xi \in \partial_* f(\bar{x})} \langle \xi, v \rangle \qquad (\forall v \in \mathbb{R}^n) \right).$$

Một tập đóng $\partial^* f(\bar{x}) \subseteq \mathbb{R}^n$ được gọi là một dưới vi phân suy rộng của f tại $\bar{x}$ nếu $\partial^* f(\bar{x})$ đồng thời là dưới vi phân suy rộng trên và dưới của f tại $\bar{x}$.

Theo [8] hàm f được gọi là có dưới vi phân suy rộng bán chính quy trên $\partial^* f(\bar{x}) \subseteq \mathbb{R}^n$ tại $\bar{x}$ nếu $\partial^* f(\bar{x})$ là tập đóng và

$$f^+(\bar{x}; v) \leq \sup_{\xi \in \partial^* f(\bar{x})} \langle \xi, v \rangle \qquad (\forall v \in \mathbb{R}^n). \tag{1.1}$$

Ví dụ 1.1.1

Cho hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ được xác định bởi

$$f(x) := \begin{cases} x, & \text{khi} \quad x \in \mathbb{Q} \cap [0; +\infty[, \\ x^4 - 4x^3 + 4x^2, & \text{khi} \quad x \in \mathbb{Q} \cap]-\infty; 0], \\ 0, & \text{trong các trường hợp khác,} \end{cases}$$

trong đó $\mathbb{Q}$ là tập các số hữu tỷ. Khi đó

$$f^+(0; v) = \begin{cases} v, & \text{khi} \quad v \geq 0, \\ 0, & \text{khi} \quad v < 0, \end{cases}$$

$$f^-(0; v) = 0 \quad (\forall v \in \mathbb{R}).$$

Tập $\{0; 1\}$ là dưới vi phân suy rộng bán chính quy trên của f tại $\bar{x}$, cho nên nó cũng là dưới vi phân suy rộng trên của f tại $\bar{x}$. Tập $\{0\}$ là dưới vi phân suy rộng dưới của f tại $\bar{x}$.

Theo [9], nếu xảy ra đẳng thức trong (1.1) thì $\partial^* f(\bar{x})$ được gọi là dưới vi phân suy rộng chính quy trên. Với một hàm Lipschitz địa phương, dưới vi phân

Clarke và dưới vi phân Michel-Penot là những dưới vi phân suy rộng của f tại $\bar{x}$ (xem [9]). Hơn nữa với một hàm Lipschitz địa phương chính quy trong theo nghĩa Clarke [4], dưới vi phân Clarke là một dưới vi phân suy rộng chính quy trên (xem [7]). Chú ý rằng, nếu hàm f có một dưới vi phân suy rộng chính quy trên tại $\bar{x}$ thì nó cũng là dưới vi phân suy rộng bán chính quy trên tại $\bar{x}$, và do đó nó được là dưới vi phân suy rộng trên tại $\bar{x}$.

Ví dụ 1.1.2

Ta xét hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ được xác định bởi:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \left|\cos\frac{\pi}{x}\right|, & \text{khi} \quad x \neq 0, \\ 0, & \text{khi} \quad x = 0. \end{cases}$$

Ta có $f^+(0; v) = f^-(0; v) = 0, (\forall v \in \mathbb{R})$. Dưới vi phân Clarke và Michile-Penot của f tại $\bar{x} = 0$ tương ứng là $[-\pi; \pi]$ và $\{0\}$. Các tập $\{0\}$, $[-\pi; \pi]$ và $\{-\pi; \pi\}$ là các dưới vi phân suy rộng của f tại $\bar{x}$. Tập $\{0\}$ là dưới vi phân suy rộng chính quy trên của f tại $\bar{x}$.

Theo [16] một hàm giá trị thực mở rộng f xác định trên tập $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ được gọi là tựa lồi tại $\bar{x} \in Q$ theo Q nếu với mỗi $x \in Q$,

$$f(x) \leq f(\bar{x}) \Rightarrow \forall t \in \,]0, 1[\,, \qquad f(tx + (1-t)\bar{x}) \leq f(\bar{x}).$$

f được gọi là tựa lồi trên Q nếu f là tựa lồi tại mỗi $x \in Q$. f gọi là tựa tuyến tính tại $\bar{x} \in Q$ theo Q nếu $\pm f$ là tựa lồi tại $\bar{x}$ theo Q.

Trong [20] Yang chỉ ra rằng, nếu f là liên tục, tựa lồi và có một dưới vi phân suy rộng dưới lồi trên một tập lồi Q thì với mỗi $x, y \in Q$,

$$f(x) \leq f(y) \Rightarrow \exists \xi^{(n)} \in \partial_* f(y), \qquad \lim_{n\to\infty} (\xi^{(n)}, x - y) \leq 0.$$

Nếu f có một dưới vi phân suy rộng chính quy trên tại $\bar{x}$ thì ta có mệnh đề sau đây.

Mệnh đề 1.1.1

Giả sử f có một dưới vi phân suy rộng chính quy trên $\partial^* f(\bar{x})$ tại $\bar{x}$ và f tựa lồi *tại* $\bar{x} \in Q$ *theo tập lồi* Q. *Khi đó,*

$$\forall x \in Q, f(x) \leq f(\bar{x}) \Rightarrow \forall \xi \in \partial^* f(\bar{x}), \langle \xi, x - \bar{x} \rangle \leq 0.$$

Chứng minh

Vì f là tựa lồi tại $\bar{x}$ theo Q, với mỗi $x \in Q$ thỏa mãn $f(x) \leq f(\bar{x})$, ta có

$$f^+(\bar{x}; x - \bar{x}) \leq 0.$$

Do tính chính quy trên của dưới vi phân suy rộng $\partial^* f(\bar{x})$, với mỗi $x \in Q$ thỏa mãn $f(x) \leq f(\bar{x})$, ta có

$$\sup_{\xi \in \partial^* f(\bar{x})} \langle \xi, x - \bar{x} \rangle = f^+(\bar{x}; x - \bar{x}) \leq 0.$$

Từ đó, ta có điều phải chứng minh. □

Theo [20], hàm thực mở rộng f có một dưới vi phân suy rộng dưới lồi $\partial_* f(x)$ trên Q được gọi là giả lồi tiệm cận dưới trên Q nếu với mỗi $x, y \in Q$,

$$\exists \xi^{(n)} \in \partial_* f(x), \quad \lim_{n \to \infty} \left\langle \xi^{(n)}, y - x \right\rangle \geq 0 \Rightarrow f(y) \geq f(x).$$

Hàm giá trị thực mở rộng f có một dưới vi phân suy rộng $\partial^* f(\bar{x})$ tại $\bar{x}$ được gọi là giả lồi tiệm cận tại $\bar{x}$ theo Q nếu, với mỗi $x \in Q$ ta có

$$\exists \xi^{(n)} \in \mathrm{conv} \partial^* f(\bar{x}), \quad \lim_{n \to \infty} \left\langle \xi^{(n)}, x - \bar{x} \right\rangle \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq f(\bar{x}).$$

trong đó conv kí hiệu bao lồi

Ví dụ 1.1.3

Cho $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) := \begin{cases} x, & khi\ x \leq 0, \\ \frac{1}{2}x, & khi\ x > 0, \end{cases}$$

$$g(x) := \begin{cases} x, & khi\ x \in \mathbb{Q}, \\ 2x, & khi\ x \in (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}) \cap \left]-\infty, 0\right], \\ \frac{1}{2}x, & khi\ x \in (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}) \cap \left[0, \infty\right[. \end{cases}$$